ДИС без граници

Огнян Кунчев

Институт по Математика и Информатика, БАН

"100 години от рождението на проф. Ярослав Тагамлицки"
София, 2017

Контекст на събитието

- Една основна задача на тази конференция е

Контекст на събитието

- Една основна задача на тази конференция е
- дигитализация и запазването на културното и научно наследство и неговото разпространение

Контекст на събитието

- Една основна задача на тази конференция е
- дигитализация и запазването на културното и научно наследство и неговото разпространение
- това обяснява и защо много от абстрактите и материалите са на английски.

Социално-исторически контекст в дейността на Я.Т. - Първата и Втората ИТ революции

- Първата ИТ революция - Математиката през 60—те и 70—те

Социално-исторически контекст в дейността на Я.Т. - Първата и Втората ИТ революции

- Първата ИТ революция - Математиката през 60–те и 70–те
- Промяна на ландшафта (екосистемата) - Математическите гимназии

Социално-исторически контекст в дейността на Я.Т. - Първата и Втората ИТ революции

- Първата ИТ революция - Математиката през 60—те и 70—те
- Промяна на ландшафта (екосистемата) - Математическите гимназии
- Защо Мат. Гимназиите са лоши - (и опитът в Москва) - негативният опит - убиват интереса към математиката. Сравнението с космически кораб.

Социално-исторически контекст в дейността на Я.Т. - Първата и Втората ИТ революции

- Първата ИТ революция - Математиката през 60–те и 70–те
- Промяна на ландшафта (екосистемата) - Математическите гимназии
- Защо Мат. Гимназиите са лоши - (и опитът в Москва) - негативният опит - убиват интереса към математиката. Сравнението с космически кораб.
- Реакцията на Я.Т. : **Обобщените редици** на Мур-Смит-Шатуновски (първи курс); **Лебеговия интеграл** върху локално-компактни Хаусдорфови топ. пространства. Теоремата на **Стоун-Вайерщрас** – в пълната общност

Социално-исторически контекст в дейността на Я.Т. - Първата и Втората ИТ революции

- Първата ИТ революция - Математиката през 60—те и 70—те
- Промяна на ландшафта (екосистемата) - Математическите гимназии
- Защо Мат. Гимназиите са лоши - (и опитът в Москва) - негативният опит - убиват интереса към математиката. Сравнението с космически кораб.
- Реакцията на Я.Т. : **Обобщените редици** на Мур-Смит-Шатуновски (първи курс); **Лебеговия интеграл** върху локално-компактни Хаусдорфови топ. пространства. Теоремата на **Стоун-Вайерщрас** – в пълната общност
- Втората ИТ революция – 50 години по-късно - сегашният ландшафт

Социално-исторически контекст в дейността на Я.Т. - Първата и Втората ИТ революции

- Първата ИТ революция - Математиката през 60—те и 70—те
- Промяна на ландшафта (екосистемата) - Математическите гимназии
- Защо Мат. Гимназиите са лоши - (и опитът в Москва) - негативният опит - убиват интереса към математиката. Сравнението с космически кораб.
- Реакцията на Я.Т. : **Обобщените редици** на Мур-Смит-Шатуновски (първи курс); **Лебеговия интеграл** върху локално-компактни Хаусдорфови топ. пространства. Теоремата на **Стоун-Вайерщрас** – в пълната общност
- Втората ИТ революция – 50 години по-късно - сегашният ландшафт
- Математиката в ИКТ ерата:

Социално-исторически контекст в дейността на Я.Т. - Първата и Втората ИТ революции

- Първата ИТ революция - Математиката през 60—те и 70—те
- Промяна на ландшафта (екосистемата) - Математическите гимназии
- Защо Мат. Гимназиите са лоши - (и опитът в Москва) - негативният опит - убиват интереса към математиката. Сравнението с космически кораб.
- Реакцията на Я.Т. : **Обобщените редици** на Мур-Смит-Шатуновски (първи курс); **Лебеговия интеграл** върху локално-компактни Хаусдорфови топ. пространства. Теоремата на **Стоун-Вайерщрас** – в пълната общност
- Втората ИТ революция – 50 години по-късно - сегашният ландшафт
- Математиката в ИКТ ерата:
- Математиката се продава в една опаковка с Информационните технологии, в един сандък, на който отгоре пише ИКТ

Архимед и неговият Анализ

- https://en.wikipedia.org/wiki/On_the_Sphere_and_Cylinder

Архимед и неговият Анализ

- https://en.wikipedia.org/wiki/On_the_Sphere_and_Cylinder
- Енциклопедия Британика:

Архимед и неговият Анализ

- https://en.wikipedia.org/wiki/On_the_Sphere_and_Cylinder
- Енциклопедия Британика:
- "The argument Archimedes used to prove the formula for the volume of a ball was rather involved in its geometry, and many modern textbooks have a simplified version using the **concept of a limit**, which, of course, did not exist in Archimedes' time. Archimedes used an inscribed half-polygon in a semicircle, then rotated both to create a conglomerate of frustums in a sphere, of which he then determined the volume."

Архимед и неговият Анализ

- https://en.wikipedia.org/wiki/On_the_Sphere_and_Cylinder
- Енциклопедия Британика:
- "The argument Archimedes used to prove the formula for the volume of a ball was rather involved in its geometry, and many modern textbooks have a simplified version using the **concept of a limit**, which, of course, did not exist in Archimedes' time. Archimedes used an inscribed half-polygon in a semicircle, then rotated both to create a conglomerate of frustums in a sphere, of which he then determined the volume."
- "Archimedes was both a great **engineer** and a great **inventor**, although his books concentrated on **applied mathematics** and **mechanics** and **rigorous mathematical proofs** (Heath, 2002). He established the principles of plane and solid geometry. Some of Archimedes' accomplishments were with mathematical principles, such as his calculation of the first reliable value for π to calculate the areas and volumes of curved surfaces and circular forms"

Архимед и фундаменталните изследвания

- "According to Plutarch (c. 46–119 ce), Archimedes had so **low an opinion** of the kind of practical invention at which he excelled and to which **he owed his contemporary fame** that he left **no written work** on such subjects. While it is true that—apart from a dubious reference to a treatise, “On Sphere-Making”—all of his known works were of a **theoretical character**, his interest in mechanics nevertheless deeply influenced his mathematical thinking. Not only did he write works on **theoretical mechanics** and **hydrostatics**, but his treatise **Method Concerning Mechanical Theorems** shows that he used mechanical reasoning as a heuristic device for the discovery of new mathematical theorems."

За педагогическите похвати на професор Тагамлицки

- във всяка лекция - повторение в сбит вид на материала от предишните

За педагогическите похвати на професор Тагамлицки

- във всяка лекция - повторение в сбит вид на материала от предишните
- контрол с листчета

За педагогическите похвати на професор Тагамлицки

- във всяка лекция - повторение в сбит вид на материала от предишните
- контрол с листчета
- можеше ли Джон Неш да преподава така? (Beautiful Mind)

За педагогическите похвати на професор Тагамлицки

- във всяка лекция - повторение в сбит вид на материала от предишните
- контрол с листчета
- можеше ли Джон Неш да преподава така? (Beautiful Mind)
- преподавателската нагрузка на ЯТ + листчета

Защо е наречен този подход "Ефодика"?

- В съчинението ”Методът на Механичните Теореми” той описва един метод за определяне на обеми, който съдържа равновесие

Защо е наречен този подход "Ефодика"?

- В съчинението ”Методът на Механичните Теореми” той описва един метод за определяне на обеми, който съдържа равновесие
- центрове на маси и инфинитезимални сечения.

Защо е наречен този подход "Ефодика"?

- В съчинението ”Методът на Механичните Теореми” той описва един метод за определяне на обеми, който съдържа равновесие
- центрове на маси и инфинитезимални сечения.
- *Περί των μηχανίκων Θεορηματων προς Ερατοσϑενην εφοδος* = Методът на Механичните Теореми,

Защо е наречен този подход "Ефодика"?

- В съчинението "Методът на Механичните Теореми" той описва един метод за определяне на обеми, който съдържа равновесие
- центрове на маси и инфинитезимални сечения.
- $\Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\ \tau\omega\nu\ \mu\eta\chi\alpha\nu\acute{\iota}\kappa\omega\nu\ \Theta\varepsilon o\rho\eta\mu\alpha\tau\omega\nu\ \pi\rho o\varsigma\ E\rho\alpha\tau o\sigma\vartheta\varepsilon\nu\eta\nu\ \varepsilon\varphi o\delta os$ = Методът на Механичните Теореми,
- $\varepsilon\varphi o\delta os$ = **If applicable**

Защо е наречен този подход "Ефодика"?

- В съчинението "Методът на Механичните Теореми" той описва един метод за определяне на обеми, който съдържа равновесие
- центрове на маси и инфинитезимални сечения.
- $\Pi\varepsilon\rho i\ \tau\omega\nu\ \mu\eta\chi\alpha\nu i\kappa\omega\nu\ \Theta\varepsilon o\rho\eta\mu\alpha\tau\omega\nu\ \pi\rho o\varsigma\ E\rho\alpha\tau o\sigma\vartheta\varepsilon\nu\eta\nu\ \varepsilon\varphi o\delta os$ = Методът на Механичните Теореми,
- $\varepsilon\varphi o\delta os$ = **If applicable**
- Елементарността на изложението на Архимед е било като модел за едно ново изложение на ДИС

Изложение на Ефодиката - Lim-free Calculus

- Изложение по статията подготвена от Владимир Чакалов,

Изложение на Ефодиката - Lim-free Calculus

- Изложение по статията подготвена от Владимир Чакалов,
- "Един метод за изграждане на елементи от диференциалното и интегралното смятане без граничен преход"

Изложение на Ефодиката - Lim-free Calculus

- Изложение по статията подготвена от Владимир Чакалов,
- "Един метод за изграждане на елементи от диференциалното и интегралното смятане без граничен преход"
- в брошурата Я. Тагамлицки, "За обучението по математика", СУ "Кл. Охридски", 2016.

Нормални функции

- **Дефиниция на Нормална функция**: Казваме, че една функция $f(x) \in N(a, b)$ в интервал $[a, b]$, ако за вс. точка $c \in [a, b]$, имаме следното представяне:

$$f(x) = a + (x - c)\, b + R(x) \qquad x \in (a, b)$$
$$R(x) \leq A (x - c)^2$$

като a, b не зависят от x, а A не зависи от x, c.

Нормални функции

- **Дефиниция на Нормална функция**: Казваме, че една функция $f(x) \in N(a, b)$ в интервал $[a, b]$, ако за вс. точка $c \in [a, b]$, имаме следното представяне:

$$f(x) = a + (x - c)\, b + R(x) \qquad x \in (a, b)$$
$$R(x) \leq A (x - c)^2$$

като a, b не зависят от x, а A не зависи от x, c.

- **ТЕОРЕМА**. Константата b е еднозначно определена от горното условие.

Нормални функции

- **Дефиниция на Нормална функция**: Казваме, че една функция $f(x) \in N(a,b)$ в интервал $[a,b]$, ако за вс. точка $c \in [a,b]$, имаме следното представяне:

$$f(x) = a + (x-c)\,b + R(x) \qquad x \in (a,b)$$
$$R(x) \leq A(x-c)^2$$

  като a, b не зависят от x, а A не зависи от x, c.

- **ТЕОРЕМА**. Константата b е еднозначно определена от горното условие.

- Полагаме

$$f'(c) := b.$$

- Дефиниция на Липшицова функция:

$$\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|\leq K\left|x_1-x_2\right|$$

Основни резултати

- Дефиниция на Липшицова функция:

$$\left| f\left(x_1\right) - f\left(x_2\right)\right| \leq K \left| x_1 - x_2 \right|$$

- Ако $f \in N$ то тогава f' е Липшицова;

Основни резултати

- Дефиниция на Липшицова функция:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K |x_1 - x_2|$$

- Ако $f \in N$ то тогава f' е Липшицова;
- Ако $f \in N$ то тогава f е Липшицова;

Основни резултати

- Дефиниция на Липшицова функция:

$$\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right| \leq K\left|x_1-x_2\right|$$

- Ако $f \in N$ то тогава f' е Липшицова;
- Ако $f \in N$ то тогава f е Липшицова;
- Нека $f(x) = x$, тогава $f \in N$;

Основни резултати

- Дефиниция на Липшицова функция:

$$\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right| \leq K\left|x_1-x_2\right|$$

- Ако $f \in N$ то тогава f' е Липшицова;
- Ако $f \in N$ то тогава f е Липшицова;
- Нека $f(x)=x$, тогава $f \in N$;
- Нека $f, g \in N$, тогава $F=fg \in N$

Основни резултати - 2

- Нека $f, g \in N$, $+$ ... областите на дефиниция са съгласувани, следва $F(x) = f(g(x)) \in N$

Основни резултати - 2

- Нека $f, g \in N$, $+$ ... областите на дефиниция са съгласувани, следва $F(x) = f(g(x)) \in N$
- Нека $f(x) = x^{-1}$, тогава $f \in N$ за $x \neq 0$;

Основни резултати - 2

- Нека $f, g \in N$, + ... областите на дефиниция са съгласувани, следва $F(x) = f(g(x)) \in N$
- Нека $f(x) = x^{-1}$, тогава $f \in N$ за $x \neq 0$;
- Нека $f(x) \in N$, $+ \ldots$, тогава $F = f^{-1} \in N$;

Основни резултати - 2

- Нека $f, g \in N$, + ... областите на дефиниция са съгласувани, следва $F(x) = f(g(x)) \in N$
- Нека $f(x) = x^{-1}$, тогава $f \in N$ за $x \neq 0$;
- Нека $f(x) \in N$, +..., тогава $F = f^{-1} \in N$;
- Нека $f, g \in N$, +..., тогава $F = \frac{f}{g} \in N$;

Пример на доказателство

- От $f(x) = \frac{1}{x}$ при $c \neq 0$ следва, че $f'(c) = -\frac{1}{c^2}$. Наистина,

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{c} + \left(-\frac{1}{c^2}\right)(x-c) + R(x) \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{1}{c^2}(x-c) + \frac{1}{x} - \frac{1}{c} = \frac{1}{c^2}(x-c) + \frac{c-x}{xc} \\ &= \frac{1}{c}(x-c)\left[\frac{1}{c} - \frac{1}{x}\right] = \frac{1}{c}(x-c)^2\frac{1}{xc} \end{aligned}$$

Пример на доказателство

- От $f\left(x\right)=\frac{1}{x}$ при $c\neq 0$ следва, че $f'\left(c\right)=-\frac{1}{c^2}$. Наистина,

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{c}+\left(-\frac{1}{c^2}\right)\left(x-c\right)+R\left(x\right)\Longrightarrow$$

$$R\left(x\right)=\frac{1}{c^2}\left(x-c\right)+\frac{1}{x}-\frac{1}{c}=\frac{1}{c^2}\left(x-c\right)+\frac{c-x}{xc}$$

$$=\frac{1}{c}\left(x-c\right)\left[\frac{1}{c}-\frac{1}{x}\right]=\frac{1}{c}\left(x-c\right)^2\frac{1}{xc}$$

- Сравнение с обикновеното доказателство, с граничен преход:

$$\frac{f\left(x\right)-f\left(c\right)}{x-c}=\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{c}}{x-c}=\frac{\frac{c-x}{xc}}{x-c}=-\frac{1}{xc}\Longrightarrow$$

$$\lim_{x\longrightarrow c}\frac{f\left(x\right)-f\left(c\right)}{x-c}=-\frac{1}{c^2}$$

Доказателство на един случай – произведението

- **Доказателството** не е трудно:

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + R_1(x), \qquad |R_1(x)| \leq A_1 |x-c|^2$$
$$g(x) = g(c) + g'(c)(x-c) + R_2(x), \qquad |R_2(x)| \leq A_2 |x-c|^2 \Longrightarrow$$

$$f(x)g(x) = f(c)g(c) + \left[f'(c)g(c) + f(c)g'(c)\right](x-c) + R(x)$$
$$R(x) = R_1(x)\left[g(c) + g'(c)(x-c)\right] + R_2(x)\left[f(c) + f'(c)(x$$

и е очевидно, че

$$|R(x)| \leq A|x-c|^2$$

Доказателство на един случай – произведението

- **Доказателството** не е трудно:

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + R_1(x), \qquad |R_1(x)| \leq A_1 |x-c|^2$$
$$g(x) = g(c) + g'(c)(x-c) + R_2(x), \qquad |R_2(x)| \leq A_2 |x-c|^2 \Longrightarrow$$

$$f(x)g(x) = f(c)g(c) + \left[f'(c)g(c) + f(c)g'(c)\right](x-c) + R(x)$$
$$R(x) = R_1(x)\left[g(c) + g'(c)(x-c)\right] + R_2(x)\left[f(c) + f'(c)(x$$

и е очевидно, че

$$|R(x)| \leq A|x-c|^2$$

- Сравнено със стандартното:

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(x+h)\left[g(x+h) - g(\right.}{}$$
$$= f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

Теоремата за монотонност и следствия

- Теоремата за монотонност - Доказателството следва.

Теоремата за монотонност и следствия

- Теоремата за монотонност - Доказателството следва.
- Следствие: Ако $f \in N$ и $f' \equiv 0$ то тогава $f \equiv C$.

Доказателство на монотонността - аксиома на Архимед

ТЕОРЕМА. Ако функцията $f(x) \in N(a,b)$ и удовлетворява в интервала неравенството $f'(x) \geq 0$, то тогава $f(x)$ е монотонна функция.

Доказателство: Ако x_1 и x_2 с в интервала, то тогава е в сила

$$f(x_2) = f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) + R(x), \qquad |R(x)| \leq A|x_2 - x_1|^2$$

Оттук следва

$$f(x_2) \geq f(x_1) - A(x_2 - x_1)^2$$

Разделяме интервала на две части; към интервалите $\left(x_1, \frac{x_1+x_2}{2}\right)$ и $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, x_2\right)$ прилагаме горното неравенство, което дава

$$f(x_2) \geq f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - \frac{A}{4}(x_2 - x_1)^2$$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq f(x_1) - \frac{A}{4}(x_2 - x_1)^2$$

Монотонност - доказателство, 2

След сумирането получаваме

$$f(x_2) \geq f(x_1) - \frac{A}{2}(x_2 - x_1)^2$$

Прилагаме n пъти тази процедура, и получаваме

$$f(x_2) \geq f(x_1) - \frac{A}{2^n}(x_2 - x_1)^2$$

Ако допуснем, че. $f(x_2) < f(x_1)$, то от горното получаваме

$$2^n \leq \frac{A(x_2 - x_1)^2}{f(x_1) - f(x_2)}$$

В частност, понеже имаме $n \leq 2^n$, то би следвало, че числото $\frac{A(x_2-x_1)^2}{f(x_1)-f(x_2)}$ е една горна граница на целите числа. Това противоречи на аксиомата на Архимед. Следва $f(x_2) \geq f(x_1)$.

Примитивни функции - теорема на Немег

ТЕОРЕМА. Нека $F \in N(a, b)$ и нека $[p, q] \subset (a, b)$. Ако е изпълнено

$$\mu \leq F'(x) \leq \nu \qquad x \in [p, q],$$

то тогава е в сила и

$$\mu \leq \frac{F(p) - F(q)}{p - q} \leq \nu.$$

ДЕФИНИЦИЯ. Казваме, че функцията F е **примитивна** на f в интервала (a, b) когато f е ограничена във всеки краен подинтервал $[p, q] \subset (a, b)$ и е изпълнено следното условие: от неравенствата

$$\mu \leq f(x) \leq \nu \qquad x \in [p, q],$$

следват неравенствата

$$\mu \leq \frac{F(p) - F(q)}{p - q} \leq \nu$$

Следва, че всяка функция F е примитивна на своята производна F'.

Примитивна - 2

ТЕОРЕМА. Нека f е липшицова във всеки краен и затворен подинтервал на (a, b), а F е примитивна на f в същия. Тогава

$$F \in N(a, b)$$

и е в сила

$$F'(x) = f(x) \qquad x \in (a, b).$$

Остава да се докаже съществуването на примитивна функция. Тя може да се приеме като **аксиома** за съществуването на обобщени обеми на тела в $\mathbb{R}^n$. Тогава Принципът за непрекъснатост на реалните числа може да се докаже като следствие.

Обеми, лица

- **АКСИОМА**: За всяко ограничено тяло T в $\mathbb{R}^3$ съществува обобщен обем $v(T)$, като са изпълнени следните условия

Обеми, лица

- **АКСИОМА**: За всяко ограничено тяло T в $\mathbb{R}^3$ съществува обобщен обем $\nu(T)$, като са изпълнени следните условия
- а) Ако $T = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$ е паралелепипед, то

$$\nu([a,b] \times [c,d] \times [e,f]) = (b-a)(d-c)(f-e)$$

Обеми, лица

- **АКСИОМА**: За всяко ограничено тяло T в $\mathbb{R}^3$ съществува обобщен обем $\nu(T)$, като са изпълнени следните условия
- а) Ако $T = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ е паралелепипед, то

$$\nu([a, b] \times [c, d] \times [e, f]) = (b - a)(d - c)(f - e)$$

- б) Ако T_1 и T_2 са две непресичащи се тела, то

$$\nu(T_1 \cup T_2) = \nu(T_1) + \nu(T_2)$$

Обеми, лица

- **АКСИОМА**: За всяко ограничено тяло T в $\mathbb{R}^3$ съществува обобщен обем $\nu(T)$, като са изпълнени следните условия
- а) Ако $T = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$ е паралелепипед, то

$$\nu([a,b] \times [c,d] \times [e,f]) = (b-a)(d-c)(f-e)$$

- б) Ако T_1 и T_2 са две непресичащи се тела, то

$$\nu(T_1 \cup T_2) = \nu(T_1) + \nu(T_2)$$

- Доказателството е чрез Диагоналния принцип.

Обеми, лица

- **АКСИОМА**: За всяко ограничено тяло T в $\mathbb{R}^3$ съществува обобщен обем $\nu(T)$, като са изпълнени следните условия
- а) Ако $T = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ е паралелепипед, то

$$\nu([a, b] \times [c, d] \times [e, f]) = (b - a)(d - c)(f - e)$$

- б) Ако T_1 и T_2 са две непресичащи се тела, то

$$\nu(T_1 \cup T_2) = \nu(T_1) + \nu(T_2)$$

- Доказателството е чрез Диагоналния принцип.
- **ВАЖНА ЗАБЕЛЕЖКА**. Този обобщен обем може дори да не е инвариантен относно еднаквост. Справка: проф. Д. Скордев: GEORGE BACHMAN and LAWRENCE NARICI , Functional Analysis, ACADEMIC PRESS New York and London, 1966.

Следствия от принципа за непрекъснатост

- **Принципът за непрекъснатост** на реалните числа е основен в това доказателство: Всяко ограничено множество от реални числа има точна горна и точна долна граница.

Следствия от принципа за непрекъснатост

- **Принципът за непрекъснатост** на реалните числа е основен в това доказателство: Всяко ограничено множество от реални числа има точна горна и точна долна граница.
- **ТЕОРЕМА**. Ако f е липшицова в $[a, b]$ и ако

$$f(a) f(b) < 0$$

то f има поне една нула в интервала.

Следствия от принципа за непрекъснатост

- **Принципът за непрекъснатост** на реалните числа е основен в това доказателство: Всяко ограничено множество от реални числа има точна горна и точна долна граница.
- **ТЕОРЕМА**. Ако f е липшицова в $[a, b]$ и ако

$$f(a) f(b) < 0$$

то f има поне една нула в интервала.
- **ТЕОРЕМА**. Ако f е липшицова във всеки краен подинтервал на (a, b) , то множеството от стойности $f((a, b))$ е също интервал.

Следствия от принципа за непрекъснатост

- **Принципът за непрекъснатост** на реалните числа е основен в това доказателство: Всяко ограничено множество от реални числа има точна горна и точна долна граница.
- **ТЕОРЕМА**. Ако f е липшицова в $[a, b]$ и ако
$$f(a) f(b) < 0$$
то f има поне една нула в интервала.
- **ТЕОРЕМА**. Ако f е липшицова във всеки краен подинтервал на (a, b), то множеството от стойности $f((a, b))$ е също интервал.
- **ТЕОРЕМА.** Ако $f \in N(a, b)$, то при подходящи ограничения отдолу на производната й f' следва, че f е строго растяща в интервала (a, b) и обратната й функция $f^{-1} \in N(a, b)$, като е в сила
$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)}$$
където $x = f^{-1}(y)$.

Елементарни функции

- Въвеждаме логаритмичната функция $f(x) = \ln x$ като примитивна на $\frac{1}{x}$. Примитивната функция $F(x)$ определяме като площта под графиката на функцията $f(x)$. Тя е единствена, поради теоремата за монотонност.

Елементарни функции

- Въвеждаме логаритмичната функция $f(x) = \ln x$ като примитивна на $\frac{1}{x}$. Примитивната функция $F(x)$ определяме като площта под графиката на функцията $f(x)$. Тя е единствена, поради теоремата за монотонност.
- Въвеждаме експоненциалната функция $f(x) = e^x$ като обратна на $\ln x$.

Елементарни функции

- Въвеждаме логаритмичната функция $f(x) = \ln x$ като примитивна на $\frac{1}{x}$. Примитивната функция $F(x)$ определяме като площта под графиката на функцията $f(x)$. Тя е единствена, поради теоремата за монотонност.
- Въвеждаме експоненциалната функция $f(x) = e^x$ като обратна на $\ln x$.
- След това,

$$a^x = e^{x \ln a}$$

Елементарни функции

- Въвеждаме логаритмичната функция $f(x) = \ln x$ като примитивна на $\frac{1}{x}$. Примитивната функция $F(x)$ определяме като площта под графиката на функцията $f(x)$. Тя е единствена, поради теоремата за монотонност.
- Въвеждаме експоненциалната функция $f(x) = e^x$ като обратна на $\ln x$.
- След това,
$$a^x = e^{x \ln a}$$
- И
$$x^b = e^{b \ln x}$$

Елементарни функции

- Въвеждаме логаритмичната функция $f(x) = \ln x$ като примитивна на $\frac{1}{x}$. Примитивната функция $F(x)$ определяме като площта под графиката на функцията $f(x)$. Тя е единствена, поради теоремата за монотонност.
- Въвеждаме експоненциалната функция $f(x) = e^x$ като обратна на $\ln x$.
- След това,
$$a^x = e^{x \ln a}$$
- И
$$x^b = e^{b \ln x}$$
- Подобно на логъритъма определяме arctan , като примитивна на $\frac{1}{1+x^2}$, като използваме площта $F(x)$ под графиката й.