Бързо сходяща редица към константата на Ойлер-Маскерони

Иван Георгиев[1]

Университет "Проф. д-р Асен Златаров", гр. Бургас

Юбилейна научна конференция "100 години от рождението на проф. Ярослав Тагамлицки"

ФМИ, СУ, 15-17 Септември, 2017

[1] Тази работа е спонсорирана от Фонд Научни Изследвания, договор ДН-02-16/19.12.2016

Мотивация

В изчислимия анализ се разглеждат принципни въпроси относно изчислимост на различни обекти от анализа.

Мотивация

В изчислимия анализ се разглеждат принципни въпроси относно изчислимост на различни обекти от анализа. Посредством подходящи системи от имена, сложни обекти от неизброими пространства придобиват по-конкретен вид, който е подходящ за оценка на изчислителната сложност на тези обекти.

Мотивация

В изчислимия анализ се разглеждат принципни въпроси относно изчислимост на различни обекти от анализа. Посредством подходящи системи от имена, сложни обекти от неизброими пространства придобиват по-конкретен вид, който е подходящ за оценка на изчислителната сложност на тези обекти. Например, име на едно реално число ξ ще наричаме тройка (f, g, h) от унарни функции в $\mathbb{N}$, такива че

$$\left| \frac{f(n) - g(n)}{h(n) + 1} - \xi \right| < \frac{1}{n + 1}$$

за всяко $n \in \mathbb{N}$.

Мотивация

В изчислимия анализ се разглеждат принципни въпроси относно изчислимост на различни обекти от анализа. Посредством подходящи системи от имена, сложни обекти от неизброими пространства придобиват по-конкретен вид, който е подходящ за оценка на изчислителната сложност на тези обекти. Например, име на едно реално число ξ ще наричаме тройка (f, g, h) от унарни функции в $\mathbb{N}$, такива че

$$\left| \frac{f(n) - g(n)}{h(n) + 1} - \xi \right| < \frac{1}{n+1}$$

за всяко $n \in \mathbb{N}$. За клас $\mathcal{F}$ от тотални функции в $\mathbb{N}$ ще казваме, че реалното число ξ е $\mathcal{F}$-изчислимо, ако съществува име (f, g, h) на ξ, такова че $f, g, h \in \mathcal{F}$.

Субрекурсивни класове от функции

Едно реално число е изчислимо, ако то е изчислимо относно класа на всички тотални изчислими функции.

Субрекурсивни класове от функции

Едно реално число е изчислимо, ако то е изчислимо относно класа на всички тотални изчислими функции. За да измерваме сложността на различни изчислими реални числа, ние разглеждаме по-тесни класове от изчислими функции, които наричаме субрекурсивни класове.

Субрекурсивни класове от функции

Едно реално число е изчислимо, ако то е изчислимо относно класа на всички тотални изчислими функции. За да измерваме сложността на различни изчислими реални числа, ние разглеждаме по-тесни класове от изчислими функции, които наричаме субрекурсивни класове. По-конкретно, ние работим с йерархията на Гжегорчик, която представлява растяща редица

$$\mathcal{E}^0 \subset \mathcal{E}^1 \subset \mathcal{E}^2 \subset \mathcal{E}^3 \subset \dots$$

от изчислими функции.

Субрекурсивни класове от функции

Едно реално число е изчислимо, ако то е изчислимо относно класа на всички тотални изчислими функции. За да измерваме сложността на различни изчислими реални числа, ние разглеждаме по-тесни класове от изчислими функции, които наричаме субрекурсивни класове. По-конкретно, ние работим с йерархията на Гжегорчик, която представлява растяща редица

$$\mathcal{E}^0 \subset \mathcal{E}^1 \subset \mathcal{E}^2 \subset \mathcal{E}^3 \subset \dots$$

от изчислими функции. Също така разглеждаме още два класа $\mathcal{M}^2$ и $\mathcal{L}^2$, такива че

$$\mathcal{M}^2 \subseteq \mathcal{L}^2 \subseteq \mathcal{E}^2.$$

Константа на Ойлер-Маскерони

Константата на Ойлер-Маскерони γ се дефинира като границата $\lim_{n\to\infty} D_n$, където

$$D_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right).$$

Константа на Ойлер-Маскерони

Константата на Ойлер-Маскерони γ се дефинира като границата $\lim_{n\to\infty} D_n$, където

$$D_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right).$$

Но тази редица е прекалено бавно сходяща, по-точно може да се докаже, че

$$\frac{1}{2n+2} < D_n - \gamma < \frac{1}{2n}$$

за всяко естествено число $n \geq 1$.

Константа на Ойлер-Маскерони

Константата на Ойлер-Маскерони γ се дефинира като границата $\lim_{n\to\infty} D_n$, където

$$D_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right).$$

Но тази редица е прекалено бавно сходяща, по-точно може да се докаже, че

$$\frac{1}{2n+2} < D_n - \gamma < \frac{1}{2n}$$

за всяко естествено число $n \geq 1$. Тази скорост на сходимост е подходяща за класа $\mathcal{L}^2$, но не и за $\mathcal{M}^2$.

Други представяния на γ

Константата γ има много други представяния, но на пръв поглед никое от тях не е подходящо за класа $\mathcal{M}^2$.

Други представяния на γ

Константата γ има много други представяния, но на пръв поглед никое от тях не е подходящо за класа $\mathcal{M}^2$.

Например, имаме следното представяне на Вака от [4]

$$\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \lfloor \log_2(k) \rfloor}{k},$$

в което общият член е $\mathcal{M}^2$-изчислим, но скоростта на сходимост не е подходяща.

Други представяния на γ

Константата γ има много други представяния, но на пръв поглед никое от тях не е подходящо за класа $\mathcal{M}^2$.

Например, имаме следното представяне на Вака от [4]

$$\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \lfloor \log_2(k) \rfloor}{k},$$

в което общият член е $\mathcal{M}^2$-изчислим, но скоростта на сходимост не е подходяща.

Също разполагаме с представяне на Карацуба от [2]

$$\gamma = 1 - \ln k \sum_{r=1}^{12k+1} \frac{(-1)^{r-1} k^{r+1}}{(r-1)!(r+1)} + \sum_{r=1}^{12k+1} \frac{(-1)^{r-1} k^{r+1}}{(r-1)!(r+1)^2} + O(2^{-k}),$$

в което скоростта на сходимост е подходяща, но общият член не е $\mathcal{M}^2$-изчислим.

Интегрално представяне на γ

Добре известно е следното равенство

$$\gamma = -\int_0^\infty e^{-x} \ln x \, dx.$$

Интегрално представяне на γ

Добре известно е следното равенство

$$\gamma = -\int_0^\infty e^{-x} \ln x \; dx.$$

Оказва се, че има подходящ метод за числено интегриране, който отговаря на изискванията за класа $\mathcal{M}^2$.

Интегрално представяне на γ

Добре известно е следното равенство

$$\gamma = -\int_0^{\infty} e^{-x} \ln x \; dx.$$

Оказва се, че има подходящ метод за числено интегриране, който отговаря на изискванията за класа $\mathcal{M}^2$.
Да означим

$$I_1 = \int_0^1 e^{-x} \ln x \; dx = -\int_1^{\infty} e^{-\frac{1}{t}} \ln t \frac{1}{t^2} \; dt,$$

Интегрално представяне на γ

Добре известно е следното равенство

$$\gamma = -\int_0^\infty e^{-x} \ln x \, dx.$$

Оказва се, че има подходящ метод за числено интегриране, който отговаря на изискванията за класа $\mathcal{M}^2$.

Да означим

$$I_1 = \int_0^1 e^{-x} \ln x \, dx = -\int_1^\infty e^{-\frac{1}{t}} \ln t \frac{1}{t^2} \, dt,$$

$$I_2 = \int_1^\infty e^{-x} \ln x \, dx,$$

Интегрално представяне на γ

Добре известно е следното равенство

$$\gamma = -\int_0^{\infty} e^{-x} \ln x \; dx.$$

Оказва се, че има подходящ метод за числено интегриране, който отговаря на изискванията за класа $\mathcal{M}^2$.

Да означим

$$I_1 = \int_0^1 e^{-x} \ln x \; dx = -\int_1^{\infty} e^{-\frac{1}{t}} \ln t \frac{1}{t^2} \; dt,$$

$$I_2 = \int_1^{\infty} e^{-x} \ln x \; dx,$$

така че $\gamma = -I_1 - I_2$.

Експоненциален метод на трапците

Целта на метода е да се апроксимира $I = \int_\alpha^\beta \theta(x)\, dx$, където θ е аналитична в $[\alpha, \beta]$.

Експоненциален метод на трапците

Целта на метода е да се апроксимира $I = \int_\alpha^\beta \theta(x)\, dx$, където θ е аналитична в $[\alpha, \beta]$.

След прилагане на линейна смяна на променливите можем да считаме, че $[\alpha, \beta] = [-1, 1]$.

Експоненциален метод на трапците

Целта на метода е да се апроксимира $I = \int_\alpha^\beta \theta(x)\ dx$, където θ е аналитична в $[\alpha, \beta]$.
След прилагане на линейна смяна на променливите можем да считаме, че $[\alpha, \beta] = [-1, 1]$.
По-нататък използваме така нареченото tanh-правило и получаваме

$$\int_{-1}^{1} \theta(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(\tanh(t)).\frac{1}{\cosh^2(t)}dt$$

Експоненциален метод на трапците

Целта на метода е да се апроксимира $I = \int_\alpha^\beta \theta(x)\,dx$, където θ е аналитична в $[\alpha, \beta]$.

След прилагане на линейна смяна на променливите можем да считаме, че $[\alpha, \beta] = [-1, 1]$.

По-нататък използваме така нареченото tanh-правило и получаваме

$$\int_{-1}^{1} \theta(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(\tanh(t)).\frac{1}{\cosh^2(t)}dt$$

$$\approx h \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \theta(\tanh(kh)).\frac{1}{\cosh^2(kh)}$$

Експоненциален метод на трапците

Целта на метода е да се апроксимира $I = \int_{\alpha}^{\beta} \theta(x)\, dx$, където θ е аналитична в $[\alpha, \beta]$.

След прилагане на линейна смяна на променливите можем да считаме, че $[\alpha, \beta] = [-1, 1]$.

По-нататък използваме така нареченото tanh-правило и получаваме

$$\int_{-1}^{1} \theta(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(\tanh(t)).\frac{1}{\cosh^2(t)} dt$$

$$\approx h \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \theta(\tanh(kh)).\frac{1}{\cosh^2(kh)}$$

$$\approx h \sum_{k=-n}^{n} \theta(\tanh(kh)).\frac{1}{\cosh^2(kh)} = I_{h,n}.$$

Експоненциален метод на трапците (втора част)

За да се балансират грешките от двете стъпки се избира

$$h = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Експоненциален метод на трапците (втора част)

За да се балансират грешките от двете стъпки се избира

$$h = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

С използване на факта, че θ е аналитична, се получава неравенството

$$\left| I_n - \int_{-1}^{1} \theta(x)dx \right| \leq \frac{M}{e^{A\sqrt{n}} - 1}$$

за положителни реални константи A, M, зависещи само от θ, α, β.

Апроксимация на I_1

Апроксимираме несобственият интеграл

$$-I_1 = \int_1^\infty e^{-\frac{1}{t}} \ln t \frac{1}{t^2}\, dt = \int_1^\infty \phi(t)\, dt$$

Апроксимация на I_1

Апроксимираме несобственият интеграл

$$-I_1 = \int_1^{\infty} e^{-\frac{1}{t}} \ln t \frac{1}{t^2}\, dt = \int_1^{\infty} \phi(t)\, dt$$

с определения интеграл

$$J_\xi^1 = \int_1^{\xi+1} \phi(t)\, dt = \frac{\xi}{2} \int_{-1}^{1} \phi_1(u,\xi)\, du,$$

където $\phi_1(u,\xi) = \phi(\frac{\xi}{2}.u + \frac{\xi+2}{2})$.

Апроксимация на I_1

Апроксимираме несобственият интеграл

$$-I_1 = \int_1^{\infty} e^{-\frac{1}{t}} \ln t \frac{1}{t^2}\, dt = \int_1^{\infty} \phi(t)\, dt$$

с определения интеграл

$$J_\xi^1 = \int_1^{\xi+1} \phi(t)\, dt = \frac{\xi}{2}\int_{-1}^{1} \phi_1(u,\xi)\, du,$$

където $\phi_1(u,\xi) = \phi(\frac{\xi}{2}.u + \frac{\xi+2}{2})$.
Методът на трапците (обобщен за интеграли с параметър), приложен към J_ξ^1 дава приближението

$$J_{\xi,n}^1 = \frac{\xi}{2}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=-n}^{n} \phi_1\left(\tanh(\frac{k}{\sqrt{n}}),\xi\right)\frac{1}{\cosh^2(\frac{k}{\sqrt{n}})}.$$

Грешка при апроксимацията на I_1

За грешката $e_1(\xi)$ при замяната на I_1 с J_ξ^1 може да се докаже оценката
$$e_1(\xi) \leq \frac{\ln(\xi+1)+1}{\xi+1}.$$

Грешка при апроксимацията на I_1

За грешката $e_1(\xi)$ при замяната на I_1 с J_ξ^1 може да се докаже оценката

$$e_1(\xi) \leq \frac{\ln(\xi+1)+1}{\xi+1}.$$

Грешката от метода на трапците е

$$\left|J_\xi^1 - J_{\xi,n}^1\right| \leq \frac{\xi}{2}\,\frac{(\ln(\xi+1)+\frac{7}{2})(2\pi+4)}{e^{\sqrt{n}}-1}$$

за произволно реално число $\xi \geq 0$ и естествено число $n > 0$.

Апроксимация на I_2

Апроксимираме несобственият интеграл

$$I_2 = \int_1^\infty e^{-x} \ln x \; dx = \int_1^\infty \psi(x) \; dx$$

Апроксимация на I_2

Апроксимираме несобственият интеграл

$$I_2 = \int_1^{\infty} e^{-x} \ln x \; dx = \int_1^{\infty} \psi(x) \; dx$$

с определения интеграл

$$J_{\xi}^2 = \int_1^{\xi+1} \psi(x) \; dx = \frac{\xi}{2} \int_{-1}^{1} \psi_1(u, \xi) \; du,$$

където $\psi_1(u, \xi) = \psi(\frac{\xi}{2}.u + \frac{\xi+2}{2})$.

Апроксимация на I_2

Апроксимираме несобственият интеграл

$$I_2 = \int_1^\infty e^{-x} \ln x \; dx = \int_1^\infty \psi(x) \; dx$$

с определения интеграл

$$J_\xi^2 = \int_1^{\xi+1} \psi(x) \; dx = \frac{\xi}{2} \int_{-1}^{1} \psi_1(u,\xi) \; du,$$

където $\psi_1(u,\xi) = \psi(\frac{\xi}{2}.u + \frac{\xi+2}{2})$.
Методът на трапците (обобщен за интеграли с параметър), приложен към J_ξ^2 дава приближението

$$J_{\xi,n}^2 = \frac{\xi}{2} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=-n}^{n} \psi_1 \left(\tanh(\frac{k}{\sqrt{n}}), \xi \right) \frac{1}{\cosh^2(\frac{k}{\sqrt{n}})}.$$

Грешка при апроксимацията на I_2

За грешката $e_2(\xi)$ при замяната на I_2 с J_ξ^2 може да се докаже оценката

$$e_2(\xi) \leq \frac{\xi + 2}{e^{\xi+1}}.$$

Грешка при апроксимацията на I_2

За грешката $e_2(\xi)$ при замяната на I_2 с J_ξ^2 може да се докаже оценката

$$e_2(\xi) \leq \frac{\xi + 2}{e^{\xi+1}}.$$

Грешката от метода на трапците е

$$\left| J_\xi^2 - J_{\xi,n}^2 \right| \leq \frac{\xi}{2} \frac{(\ln(\xi + 1) + \frac{7}{2})(2\pi + 4)}{e^{\sqrt{n}} - 1}$$

за произволно реално число $\xi \geq 0$ и естествено число $n > 0$.

Основен резултат за апроксимация на γ

В равенството $\gamma = -I_1 - I_2$ заместваме двата интеграла с техните приближения и получаваме $\gamma \approx J^1_{\xi,n} - J^2_{\xi,n}$.

Основен резултат за апроксимация на γ

В равенството $\gamma = -I_1 - I_2$ заместваме двата интеграла с техните приближения и получаваме $\gamma \approx J^1_{\xi,n} - J^2_{\xi,n}$. Комбинираната грешка е ограничена отгоре от

$$e_1(\xi) + e_2(\xi) + 2\frac{\xi}{2}\frac{(\ln(\xi+1)+\frac{7}{2})(2\pi+4)}{e^{\sqrt{n}}-1}.$$

Основен резултат за апроксимация на γ

В равенството $\gamma = -I_1 - I_2$ заместваме двата интеграла с техните приближения и получаваме $\gamma \approx J^1_{\xi,n} - J^2_{\xi,n}$. Комбинираната грешка е ограничена отгоре от

$$e_1(\xi) + e_2(\xi) + 2\frac{\xi}{2}\frac{(\ln(\xi+1)+\frac{7}{2})(2\pi+4)}{e^{\sqrt{n}}-1}.$$

За да получим окончателната редица A заместваме $\xi = \sqrt{e^{\sqrt{n}}} - 1$ и получаваме

$$A(n) = J^1_{\xi,n} - J^2_{\xi,n} = \frac{\sqrt{e^{\sqrt{n}}}-1}{2\sqrt{n}} \sum_{k=-n}^{n} \theta\left(\tanh(\frac{k}{\sqrt{n}}), \sqrt{e^{\sqrt{n}}}-1\right) \frac{1}{\cosh^2(\frac{k}{\sqrt{n}})},$$

където $\theta(u,\xi) = \phi_1(u,\xi) - \psi_1(u,\xi)$.

Основен резултат за апроксимация на γ

В равенството $\gamma = -I_1 - I_2$ заместваме двата интеграла с техните приближения и получаваме $\gamma \approx J^1_{\xi,n} - J^2_{\xi,n}$. Комбинираната грешка е ограничена отгоре от

$$e_1(\xi) + e_2(\xi) + 2\frac{\xi}{2}\frac{(\ln(\xi+1)+\frac{7}{2})(2\pi+4)}{e^{\sqrt{n}}-1}.$$

За да получим окончателната редица A заместваме $\xi = \sqrt{e}^{\sqrt{n}} - 1$ и получаваме

$$A(n) = J^1_{\xi,n} - J^2_{\xi,n} = \frac{\sqrt{e}^{\sqrt{n}}-1}{2\sqrt{n}} \sum_{k=-n}^{n} \theta\left(\tanh\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right), \sqrt{e}^{\sqrt{n}}-1\right) \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right)},$$

където $\theta(u,\xi) = \phi_1(u,\xi) - \psi_1(u,\xi)$.

За всяко ненулево естествено n имаме

$$|A(n) - \gamma| \leq \frac{(\pi+3)\sqrt{n} + 7\pi + 16}{\sqrt{e}^{\sqrt{n}}}.$$

Заключение

Получената редица A е подходяща за доказателство на $\mathcal{M}^2$-изчислимост на γ, както се вижда след заместване $n = \lfloor \log_2(m+1) \rfloor^2$ в последното неравенство.

Заключение

Получената редица A е подходяща за доказателство на $\mathcal{M}^2$-изчислимост на γ, както се вижда след заместване $n = \lfloor \log_2(m+1) \rfloor^2$ в последното неравенство.
Но общият член на редицата е прекалено сложен, за да се използва на практика за изчисляване на цифрите на γ.

Заключение

Получената редица A е подходяща за доказателство на $\mathcal{M}^2$-изчислимост на γ, както се вижда след заместване $n = \lfloor \log_2(m+1) \rfloor^2$ в последното неравенство.
Но общият член на редицата е прекалено сложен, за да се използва на практика за изчисляване на цифрите на γ.
Прости символични пресмятания с *Matlab* дават 14 правилни десетични цифри при $n = 10000$.

Библиография

- Georgiev, I. On subrecursive complexity of integration. (to appear)
- Karatsuba, E. On the computation of the Euler constant γ, Numer. Alg., **24** (2000), 83–97.
- Trefethen, L., Weideman, J. The exponentially convergent trapezoidal rule, Soc. Ind. Appl. Math. **56**, no. 3 (2014), 385–458.
- Vacca, G. A New Series for the Eulerian Constant, Quart. J. Pure Appl. Math., **41** (1910), 363–368.

Благодаря за вниманието!